

Proba 2 de Selecție pentru Lotul Olimpic  
Neptun, 16 Aprilie 2009

**Problema 1.** Numim *riglă Golomb* o riglă gradată de lungime  $\ell$ , cu  $k + 1 \geq 2$  gradații  $0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < \ell$ , astfel încât lungimile care pot fi măsurate între gradații ale riglei sunt întregi consecutivi începând cu 1, și fiecare astfel de lungime este măsurabilă doar între două dintre gradațiile riglei. Găsiți toate riglele Golomb.

**Problema 2.** Un pătrat de latură  $N = n^2 + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , este împărțit în pătrate unitate (de latură 1), dispuse pe  $N$  linii și  $N$  coloane. Cele  $N^2$  pătrate unitate sunt colorate cu  $N$  culori, câte  $N$  pătrate de fiecare culoare.

Demonstrați că pentru orice colorare există (măcar) o linie sau o coloană conținând pătrate unitate de cel puțin  $n + 1$  culori.

**Problema 3.** Demonstrați că vârfurile unui pentagon convex  $ABCDE$  sunt conciclice dacă și numai dacă

$$d(E, AB) \cdot d(E, CD) = d(E, AC) \cdot d(E, BD) = d(E, AD) \cdot d(E, BC),$$

unde prin  $d(X, YZ)$  se notează distanța de la punctul  $X$  la dreapta  $YZ$ .

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.